

افزایش دانش موضوعی
ریاضی برای معلمان

ارزش مکانی و گسترده‌نویسی اعداد و اهمیت آن در چهار عمل اصلی

بررسی رابطه‌ی طولی یک مفهوم یا موضوع و آشنایی با آن در برنامه‌ی درسی و کتاب‌های درسی شش پایه‌ی ابتدایی، در رفع مشکلات یادگیری دانش‌آموزان به معلمان کمک می‌کند.

زمانی که دانش‌آموز یک پایه در یادگیری موضوعی مشکل دارد، اگر ریشه‌ی مشکل در یادگیری موضوعات مرتبط به آن موضوع در همان پایه یا پایه‌های پیش از آن باشد، توضیح و تدریس چندباره‌ی موضوع به وی مشکلی را حل نخواهد کرد.

از این رو، برای رفع آن باید بر یادگیری موضوعات مرتبط متمرکز شد، نه صرفاً خود آن موضوع. بررسی رابطه‌ی طولی در واقع موضوعات مرتبط را آشکار می‌سازد.

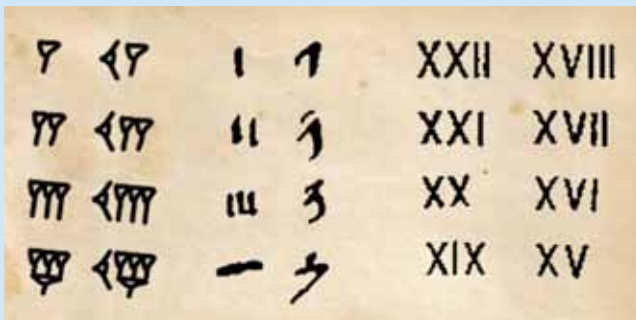
در کتاب‌های درسی ریاضی دوره‌ی ابتدایی موضوع‌هایی هستند که یا دانش‌آموزان در یادگیری آن‌ها مشکل دارند یا معلمان در یاددهی آن‌ها در این دوره از مجله‌ی رشد آموزش ابتدایی، در هر شماره، درباره‌ی یکی از آن‌ها صحبت می‌کنیم. قصد نداریم در اینجا روش تدریس بیان کنیم، بلکه آن را به عنوان یک موضوع یا مفهوم ریاضی بررسی خواهیم کرد تا دانش موضوعی خود را برای تدریس بهتر آن افزایش دهیم.

ارزش مکانی ارقام در مقایسه‌ی اعداد و همچنین در به وجود آمدن روش‌هایی برای انجام چهار عمل اصلی، نقش بسیاری دارد و تمام رویه‌هایی که برای انجام اعمال روی عددهای صحیح و اعشاری انجام می‌شوند، براساس همین ارزش مکانی تعریف شده‌اند. تقریب زدن و انجام محاسبات تقریبی نیز نیازمند ارزش مکانی است. در مطلب پیش رو، نخست ارزش مکانی و ویژگی‌های آن را مرور می‌کنیم. سپس رویه‌های انجام جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد را با استفاده از آن تا حدودی تحلیل و بررسی خواهیم کرد. در شماره‌های بعدی مجله به موضوع تقریب خواهیم پرداخت.

وقتی شروع به شمارش می‌کنیم، صفر، یک، دو، سه، چهار و به عدد نه می‌رسیم، عدد بعدی ده است. برای نوشتن عدد ده، از رقم‌هایی استفاده می‌شود که پیش از آن نیز به کار رفته‌اند: ۰ و ۱. در واقع، برای نوشتن همه‌ی عددها، از ده رقم ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ استفاده می‌کنیم و آن‌ها را کنار یکدیگر قرار می‌دهیم. در این عددنویسی، هر مکان ارزشی دارد که بزرگی رقم نوشته شده در آن مکان را تعیین می‌کند. در واقع، پایه و اساس عددنویسی و عددخوانی، ارزش مکانی ارقام است و از آنجا که ما از ده نماد برای این کار استفاده می‌کنیم، مبنای شمارش و عددنویسی ما «ده» است. علاوه بر عددنویسی و عددخوانی،

ارزش مکانی، کلید نام‌گذاری اعداد و عددنویسی

عددنویسی تاریخچه‌ای به قدمت پیدایش خط و زبان دارد و استفاده از ارزش مکانی و مبنای ده برای نوشتن و نام‌گذاری عددها در این فرایند اتفاقی نو محسوب می‌شود. در اینجا قصد نداریم این تاریخ را مرور کنیم، ولی مطالعه درباره‌ی آن خالی از لطف نیست. در تصویر مقابل به ترتیب از راست به چپ نمونه‌ای از عدد نویسی رومی، بابلی و مصری را می‌بینید.



جدول زیر، ارزش مکانی عددهای صحیح تا طبقه‌ی میلیارد و قسمت اعشاری تا یک‌هزارم را نشان می‌دهد.

| قسمت صحیح | | | | | | | | | | | قسمت اعشاری | | | |
|----------------|-------|------|---------------|-------|------|-------------|-------|------|------------|-------|-------------|-------|-----|-----|
| طبقه‌ی میلیارد | | | طبقه‌ی میلیون | | | طبقه‌ی هزار | | | طبقه‌ی یکی | | | هزارم | صدم | دهم |
| صدگان | دهگان | یکان | صدگان | دهگان | یکان | صدگان | دهگان | یکان | صدگان | دهگان | یکان | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |

جدول ارزش مکانی اعداد

برای نام‌گذاری اعداد، یعنی خواندن یا نوشتن عددها، باید رقم‌های عدد موردنظر را در این جدول قرار دهیم و براساس این مرتبه‌ها عدد را بخوانیم یا بنویسیم.

می‌دانید که این جدول، هم از سمت راست و هم از سمت چپ، با همین نظم و الگوهایی که دارد، ادامه پیدا می‌کند:

هر ده تا یک‌هزارم می‌شود یک‌صدم. هر ده تا یک‌صدم می‌شود یک‌دهم. هر ده تا یک‌دهم می‌شود یک واحد کامل (یک). برعکس، هر یکی برابر با ده تا یک‌دهم است. هر یک‌دهم برابر با ده تا یک‌صدم است و ...

ارزش هر ستون، ده برابر بزرگ‌تر از ارزش ستون سمت راستش است. یعنی از راست به چپ، ارزش ستون‌ها ده برابر ده برابر افزایش می‌یابد (بنابراین از چپ به راست، ستون‌ها ده برابر ده برابر کوچک می‌شوند).

در قسمت صحیح، ارزش هر طبقه هزار برابر ارزش طبقه‌ی سمت راست خودش است. یعنی از راست به چپ طبقه‌ها هزار برابر هزار برابر بزرگ می‌شوند.

از نظر عملی، هر ده تا یکی، می‌شود یک ده‌تایی. هر ده تا ده‌تایی، می‌شود یک صدتایی. هر ده تا صدتایی، می‌شود یک هزارتایی. هر ده تا هزارتایی، می‌شود یک ده‌هزارتایی و ...

در قسمت صحیح، هر طبقه سه قسمت دارد: یکان، دهگان و صدگان (به همین دلیل هم هست که طبقه‌ها هزار برابر هزار برابر بزرگ می‌شوند).

برعکس، اگر یک ده‌هزارتایی را باز کنیم، ده تا هزارتایی است. اگر یک هزارتایی را باز کنیم، ده تا صدتایی است و ... در قسمت اعشاری نیز همین روند برقرار است. یعنی

گسترده‌نویسی و روش‌های محاسبه

گسترده‌ی عددی مانند $43,782,501/617$ چنین است:

$$4 \times 10,000,000 + 3 \times 1,000,000 + 7 \times 100,000 + 8 \times 10,000 + 2 \times 1,000 + 5 \times 100 + 5 \times 10 + 1 \times 1 + 6 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{1}{100} + 7 \times \frac{1}{1000} = 40,000,000 + 30,000,000 + 700,000 + 80,000 + 2,000 + 500 + 1 + \frac{6}{10} + \frac{1}{100} + \frac{7}{1000}$$

در گسترده‌نویسی، هر رقم در ارزش مکانی که در آن قرار گرفته است ضرب می‌شود تا مقدار واقعی آن معلوم شود. عدد موردنظر ما مجموع همه‌ی این مقدارهاست. برای مثال، رقم ۳ در عدد بالا، ۳ نیست، بلکه ۳ میلیون است. زیرا در محل یکان میلیون قرار گرفته است. یا رقم ۶ در واقع ۶ نیست، بلکه ۶ دهم است. وقتی عددی را می‌خوانید یا می‌نویسید، رقم‌ها باید با ارزش‌هایشان همراه باشند. همین موضوع کمک می‌کند بتوانید دو عدد را با هم مقایسه کنید و عدد بزرگ‌تر را تشخیص دهید. در ادامه‌ی این مطلب، نقش گسترده‌نویسی را در رویه‌های چهار عمل اصلی اعداد بررسی خواهیم کرد.

اکنون شما رویه‌ی ضرب عددهای چند رقمی در چند رقمی و رویه‌ی تقسیم عددهای چند رقمی بر چند رقمی را تحلیل کنید. توجه کنید که در ضرب دو عدد چندرقمی، از گسترده‌ی هر دو عدد و روش پخش کردن دو پراتنز در هم (که بر خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع استوار است) استفاده می‌شود (کتاب ریاضی چهارم، صفحه‌های ۴۹ تا ۵۱). به صورت مشابه، در تقسیم دو عدد چند رقمی بر یکدیگر نیز از گسترده‌ی اعداد و خاصیت پخشی تقسیم نسبت به جمع استفاده می‌شود (کتاب ریاضی چهارم، صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰).

اکنون که می‌دانیم رویه‌های چهار عمل اصلی اعداد براساس گسترده‌ی ریاضی ابتدایی را صفحه به صفحه ورق می‌زنیم تا ببینیم چگونه بسیاری از موضوعات و حتی تمرین‌ها یا فعالیت‌ها برای ایجاد بستر و موقعیت لازم درک این ارتباط است. در جدول مقابل، این بررسی را برای پایه‌های اول تا چهارم خلاصه کرده‌ایم. شما نیز شش کتاب را ورق بزنید و اگر ما موردی را از قلم انداخته‌ایم، به این جدول اضافه و پایه‌های پنجم و ششم را کامل کنید.



۴

توزیع در جدول ارزش مکانی:

موضوع ۱۱۵۷ را از ۱۳۳۲۲ کم کنیم.
این عدد را در جدول ارزش مکانی می‌نویسیم، عدد جدید را در جدول کوچک‌تر می‌نویسیم.

| | | | | |
|------|-----|----|---|---|
| ۱۰۰۰ | ۳۰۰ | ۳۰ | ۲ | ۲ |
| ۱۰۰۰ | ۳۰۰ | ۳۰ | ۲ | ۲ |
| ۱۰۰۰ | ۳۰۰ | ۳۰ | ۲ | ۲ |
| ۱۰۰۰ | ۳۰۰ | ۳۰ | ۲ | ۲ |
| ۱۰۰۰ | ۳۰۰ | ۳۰ | ۲ | ۲ |

استوارانتریم!
را از جدول ارزش مکانی می‌نویسیم.
کم می‌کنیم و آن را می‌کشیم.
این کار را به ترتیب برای
استوارانتریم! در جدول ارزش مکانی، این کار را به ترتیب انجام می‌دهیم.
محصول توزیع، ۱۳۱۷۵ است.

می‌بینید که در این روش، از گسترده‌ی هر دو عدد و روش پخش کردن دو پراتنز در هم (که بر خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع استوار است) استفاده می‌شود.

۱

جمع در جدول ارزش مکانی:

موضوع ۱۴۷۱۶ + ۵۴۹، عدد را در جدول ارزش مکانی می‌نویسیم، عدد جدید را در جدول ارزش مکانی می‌نویسیم.

| | | | |
|------|-----|----|----|
| ۱۰۰۰ | ۴۰۰ | ۷۰ | ۱۶ |
| ۱۰۰۰ | ۴۰۰ | ۷۰ | ۱۶ |
| ۱۰۰۰ | ۴۰۰ | ۷۰ | ۱۶ |
| ۱۰۰۰ | ۴۰۰ | ۷۰ | ۱۶ |
| ۱۰۰۰ | ۴۰۰ | ۷۰ | ۱۶ |

اول ۵۴۹ را می‌نویسیم.
۲۹ را می‌نویسیم.
۴۷۲۰۳ را می‌نویسیم.
۴۷۴۹۳ را می‌نویسیم.
۹ را می‌نویسیم.
۴۷۶۷۲ را می‌نویسیم.

می‌بینید که در این روش، از گسترده‌ی هر دو عدد و روش پخش کردن دو پراتنز در هم (که بر خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع استوار است) استفاده می‌شود.

۵

ضرب عدد یک رقمی در عدد چند رقمی:

موضوع ۷۷ در ۲۴۱ ضرب کنیم.

| |
|--------|
| ۲۴۳ |
| x ۷ |
| ۱۶۰۱ |
| + ۱۶۹۰ |
| + ۱۷۰۰ |
| ۱۷۰۱ |

ابتدا ۷۷ در ۳ ضرب می‌کنیم، ۲۱۰ می‌شود.
بعد ۷۷ در ۴۰ ضرب می‌کنیم، ۳۰۸۰ می‌شود.
حاصل را با هم جمع می‌کنیم.
۱۷۰۱ است.

می‌بینید که در این روش، از گسترده‌ی هر دو عدد و روش پخش کردن دو پراتنز در هم (که بر خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع استوار است) استفاده می‌شود.

$7 \times (200 + 40 + 1) = 7 \times 200 + 7 \times 40 + 7 \times 1$

۲

توزیع در جدول ارزش مکانی:

موضوع ۲۱۷ را از ۲۲۷ کم کنیم.

| |
|-------|
| ۲۲۷ |
| - ۲۱۷ |
| ۱۰ |
| - ۱۲ |
| ۲۲۷ |
| - ۲۱۷ |
| ۱۰ |
| - ۱۲ |
| ۲۲۱ |

ابتدا ۲۱۷ را کم می‌کنیم.
عدد ۱۰ را کم می‌کنیم.
در ۱۰۰، ۲۰۰ را کم می‌کنیم.
محصول توزیع، ۲۲۱ است.

می‌بینید که در این روش، از گسترده‌ی هر دو عدد و روش پخش کردن دو پراتنز در هم (که بر خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع استوار است) استفاده می‌شود.

$217 = 200 + 10 + 7$

۶

تقسیم بر عددهای یک رقمی:

موضوع ۷۴۸ را بر ۳ تقسیم کنیم.

| |
|-------|
| ۷۴۸ |
| - ۴۰۰ |
| ۱۳۸ |
| - ۱۲۰ |
| ۱۸ |
| - ۱۸ |
| ۰ |

ابتدا ۷۰۰ را بر ۳ تقسیم می‌کنیم.
سپس ۴۰ را به ۱۰۰ + ۳۰ می‌نویسیم.
با ۳ تقسیم می‌کنیم.
در ۱۰۰، ۳۰ را کم می‌کنیم.
تقسیم می‌کنیم.

محصول تقسیم، ۲۴۶ است و باقی‌مانده ۰ می‌ماند.

می‌بینید که در این روش، از گسترده‌ی هر دو عدد و روش پخش کردن دو پراتنز در هم (که بر خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع استوار است) استفاده می‌شود.

۳

جمع در جدول ارزش مکانی:

موضوع ۲۴۹۲۳ + ۳۱۲۲۷، آن عدد را در جدول ارزش مکانی می‌نویسیم.

| | | | | |
|------|-----|----|----|---|
| ۲۰۰۰ | ۴۰۰ | ۹۰ | ۲۰ | ۳ |
| ۲۰۰۰ | ۴۰۰ | ۹۰ | ۲۰ | ۳ |
| ۲۰۰۰ | ۴۰۰ | ۹۰ | ۲۰ | ۳ |
| ۲۰۰۰ | ۴۰۰ | ۹۰ | ۲۰ | ۳ |
| ۲۰۰۰ | ۴۰۰ | ۹۰ | ۲۰ | ۳ |

استوارانتریم! هم جمع می‌کنیم و آن را می‌کشیم.
می‌بینید که در این روش، از گسترده‌ی هر دو عدد و روش پخش کردن دو پراتنز در هم (که بر خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع استوار است) استفاده می‌شود.

محصول جمع در جدول، ۵۸۱۷۰ است.

می‌بینید که در این روش، از گسترده‌ی هر دو عدد و روش پخش کردن دو پراتنز در هم (که بر خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع استوار است) استفاده می‌شود.

جدول رابطی طولی موضوعات مرتبط با ارزش مکانی و گسترده‌نویسی در کتاب‌های ریاضی ابتدایی

| پایه | صفحه | موضوع |
|------|----------|---|
| ۱ | ۱۲۹ | جمع عددهای مضرب ۱۰ (مانند ۲۰ و ۳۰ و ۵۰ و ۸۰) زمینه‌ی لازم را برای استفاده از ارزش مکانی در جمع عددهای دورقمی ایجاد می‌کند. |
| | ۱۳۵ | ده تا ده تا شمردن زمینه‌ی لازم را برای استفاده از ارزش مکانی در جمع (که دو عدد زیر هم به صورت ستونی نوشته می‌شوند) ایجاد می‌کند. |
| | ۱۳۵ | تفریق مضرب‌های ۱۰ (مانند ۱۰-۴۰ و ۲۰-۵۰) زمینه‌ی لازم را برای استفاده از ارزش مکانی در تفریق (که دو عدد زیر هم نوشته می‌شوند) ایجاد می‌کند. |
| | ۱۵۹ | جمع و تفریق مضرب‌های ۱۰ (مانند ۳۰+۲۰ و ۱۰-۶۰) و مقایسه‌ی حاصل آن‌ها زمینه‌ی لازم را برای استفاده از ارزش مکانی در جمع و تفریق (که دو عدد زیر هم نوشته می‌شوند) و برای مقایسه‌ی اعداد، ایجاد می‌کند. |
| | ۱۷۱ | عدد ۱۰۰ به عنوان ده بسته‌ی ده‌تایی و توسعه‌ی جدول ارزش مکانی معرفی شده است. |
| ۲ | ۲۰ | جمع و تفریق ده‌تایی با استفاده از شکل و نماد برای ایجاد زمینه‌ی لازم در استفاده از ارزش مکانی و گسترده‌نویسی در جمع و تفریق عددهای دورقمی انجام می‌شود. |
| | ۲۲ | در تمرین‌های ۱ و ۲، جمع و تفریق مضرب‌های ۱۰، به صورت پشت‌سرهم یا زیر هم نوشته و یا به صورت شفاهی بیان می‌شود و زمینه‌ی لازم را برای استفاده از ارزش مکانی در جمع عددهای دورقمی ایجاد می‌کند. |
| | ۲۸ تا ۳۳ | جمع و تفریق دو عدد دورقمی بر اساس ارزش مکانی صورت می‌گیرد. |
| | ۵۹ تا ۶۱ | عددهای سهرقمی بر اساس ارزش مکانی معرفی شده‌اند. |
| | ۶۷-۶۸ | فعالیت ۳ ص ۶۷ و کار در کلاس ۱ ص ۶۸ زمینه‌ی لازم را برای جمع و تفریق عددهای سهرقمی با استفاده از ارزش مکانی ایجاد می‌کند جمع شدن (کم شدن) دسته‌های مشابه با/از یکدیگر. |
| | ۹۲-۹۴ | مقایسه‌ی اعداد با استفاده از ارزش مکانی صورت می‌گیرد. |
| | ۹۵-۹۷ | جمع و تفریق دو عدد سهرقمی بر اساس ارزش مکانی صورت می‌گیرد. استفاده از جدول ۱۰ تا ۹۹۰ (ص ۹۶) نیز به این موضوع کمک می‌کند. |
| | ۱۰۰ | جمع در جدول ارزش مکانی انجام می‌شود. |
| | ۱۰۳ | تفریق در جدول ارزش مکانی انجام می‌شود. |
| | ۲۸ | عدد هزار به عنوان ۱۰ تا ۱۰۰ ریالی معرفی می‌شود. همچنین، ارتباط بین ۱۰ و ۱۰۰ بیان می‌شود (۱۰ تا ۱۰۰ ریالی می‌شود ۱۰۰ ریال). |
| ۳ | ۲۹-۳۰ | ارتباط بین ۱ و ۱۰ و ۱۰۰ و ۱۰۰۰ در تصاویر، و صدتا صدتا شمردن زمینه‌ی لازم را برای خواندن و نوشتن عددهای چهاررقمی ایجاد می‌کند. |
| | ۳۱ | در جدول ارزش مکانی ارزش هزارگان معرفی می‌شود. |
| | ۳۲-۳۳ | جمع و تفریق مضرب‌های ۱۰ و ۱۰۰ و ۱۰۰۰ و گسترده‌نویسی مطرح می‌شود. |
| | ۳۴-۳۶ | اعداد چهاررقمی مقایسه می‌شوند. |
| | ۱۰۰ | اعداد با استفاده از ارزش مکانی مقایسه می‌شوند. |
| | ۱۰۳-۱۰۵ | جمع و تفریق دو عدد چهاررقمی بر اساس ارزش مکانی صورت می‌گیرد. استفاده از جدول‌ها (ص ۱۰۴) نیز به این موضوع کمک می‌کند. تمرین‌های این قسمت نیز دربرای جمع و تفریق مضرب‌های ۱۰۰ یا مضرب‌های ۱۰۰۰ و به منظور ایجاد زمینه‌ی لازم است. |
| | ۱۰۶ | جمع در جدول ارزش مکانی انجام می‌گیرد. |
| | ۱۰۹ | تفریق در جدول ارزش مکانی انجام می‌گیرد. |
| | ۴ | هزار تا هزار تا شمردن و معرفی ده هزار به عنوان ده تا هزار تا انجام می‌گیرد. |
| | ۵-۷ | جدول ارزش مکانی توسعه یافته است و ارزش ده‌هزارتایی و صد‌هزارتایی معرفی شده است. همچنین، طبقه‌ی هزار مشخص شده است. ده‌هزار تا ده‌هزار تا شمردن و معرفی صد‌هزار به عنوان ده تا ده هزار انجام شده است. |
| ۴ | ۱۶-۱۹ | جدول ارزش مکانی توسعه یافته است و طبقه‌ی میلیون معرفی شده است. صد‌هزار تا صد‌هزار تا شمردن و معرفی میلیون به عنوان ده تا صد‌هزار انجام شده است. مقایسه‌ی اعداد نیز انجام شده است. |
| | ۱۹ | جمع و تفریق عددهای چندرقمی بر اساس ارزش اعداد انجام شده‌اند. |
| | ۴۸-۴۹ | ضرب دو عدد دورقمی بر اساس گسترده‌نویسی انجام شده است. |
| | ۵۰ | دو روش ارائه شده برای ضرب بر اساس گسترده‌نویسی هستند. |
| | ۵۲-۵۷ | حاصل ضرب در ادامه‌ی آنچه در صفحه‌های ۵۰ و ۵۱ آمده، بر اساس گسترده‌نویسی محاسبه شده است. |
| | ۵۸ | فعالیت به منظور آمادگی استفاده از گسترده‌نویسی در تقسیم است. |
| | ۶۲ | فعالیت برای ایجاد آمادگی لازم در استفاده از گسترده‌نویسی عمل تقسیم است. |
| | ۶۴ | در فعالیت تقسیم عدد دورقمی بر عدد بک‌رقمی، ده‌تایی‌ها جدا تقسیم می‌شوند و یکی‌ها جدا، تا آمادگی لازم برای استفاده از گسترده‌نویسی در عمل تقسیم ایجاد شود. |
| | ۶۶ | در فعالیت تقسیم عدد سه رقمی بر عدد یک رقمی، صدتایی‌ها جدا تقسیم می‌شوند، ده‌تایی‌ها جدا و یکی‌ها جدا، تا آمادگی لازم برای استفاده از گسترده‌نویسی در عمل تقسیم ایجاد شود. |
| | ۶۸ | در فعالیت تقسیم بر عدد دورقمی، صدتایی‌ها جدا تقسیم می‌شوند، ده تایی‌ها جدا و یکی‌ها جدا، تا آمادگی لازم برای استفاده از گسترده‌نویسی در عمل تقسیم ایجاد شود. |
| ۵ | ۷۰ | در فعالیت، تقسیم بر عدد دورقمی، با استفاده از گسترده‌نویسی عمل تقسیم انجام می‌شود. |
| | ۱۰۸ | فعالیت ۳ برای ایجاد زمینه‌ی لازم در استفاده از ارزش مکانی در جمع و تفریق عددهای اعشاری است. |
| | ۱۱۲ | ارزش مکانی عددهای اعشاری معرفی می‌شود. |
| | ۱۱۴ | جمع و تفریق زیرهم بر اساس ارزش مکانی صورت می‌گیرد. |